rede emancipa movimento social de Cursinhos Populares

# Apostila – Matemática 2

*Geometria Plana*

*Geometria Espacial*

*Geometria Analítica*

*Trigonometria*

2012

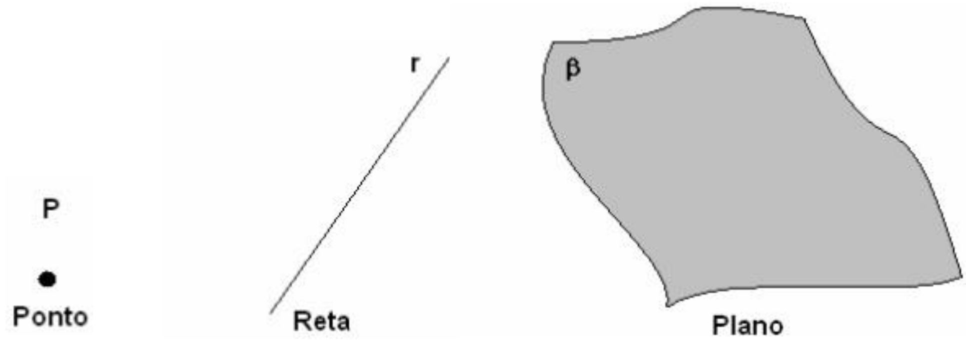
# 1 GEOMETRIA PLANA

## 1.1 DEFINIÇÕES

**Ponto:** Um elemento do espaço que define uma posição.

**Reta:** Conjunto infinito de pontos. Dois pontos são suficientes para determinar uma reta, ou ainda um ponto e a inclinação da mesma.

**Plano:** Conjunto infinito de retas. Três pontos são suficientes para determinar um plano.




**Semi-reta:** Sai de um ponto determinado e se prolonga indefinidamente.

**Segmento de reta:** Trecho de reta que se inicia em um ponto determinado e tem fim em outro ponto determinado. Não se prolonga indefinidamente.

**Ângulo:** Formado pela união de semi-retas, ou mesmo por segmento de retas.

## 1.2 ESTUDO DOS ÂNGULOS

### 1.2.1 Medida de ângulos

Existem três unidades de medidas de ângulos: graus (º), radianos (rad) e grados (gr). A correspondência entre essas medidas é a seguinte:

$$\boxed{180^\circ = \pi \text{ rad} = 200 \text{ gr}}$$

A medida de graus ainda é subdividida em minutos (‘) e segundos (“), na base hexadecimal.

$$\boxed{1^\circ = 60' = 3600''}$$

Exemplos:

| | | |
|---|---|---|
| $30^\circ = \pi / 6$ rad | $60^\circ = \pi / 3$ rad | 35,26º = 35º 15’ 36” |
| $45^\circ = \pi /4$ rad | $90^\circ = \pi /2$ rad | 49,60º = 49º 36’ 00” |

### 1.2.2 Definições

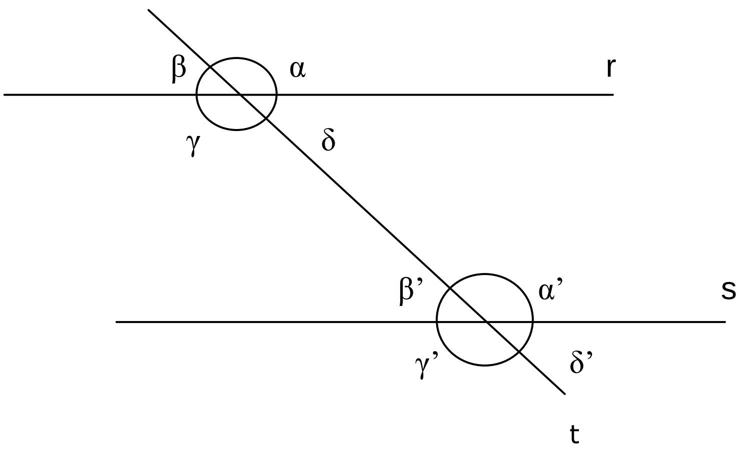
Dizemos que um ângulo é,

- *Raso*, se, e somente se, é igual a 180º;
- *Nulo*, se, e somente se, é igual a 0º;
- *Reto*, se, e somente se, é igual a 90º;
- *Agudo*, se, e somente se, é maior que 0º e menor que 90º;
- *Obtuso*, se, e somente se, é maior que 90º e menor que 180º.

Se a soma de dois ângulos resulta:

- 90º , dizemos que os ângulos são *complementares*;
- 180º, dizemos que os ângulos são *suplementares*.

### 1.2.3 Retas paralelas interceptadas por uma transversal – *A "Regra do Zorro"*




Estando nesta configuração, cada par de ângulos recebe um nome, a saber;

- Correspondentes*: (α , α'), (β, β'), (γ, γ'), (δ, δ');
- Alternos internos*: (γ, α'), (δ, β');
- Alternos externos*: (α, γ'), (β, δ');
- Colaterais internos**: (δ, α'), (γ, β');
- Colaterais externos**: (α, δ'), (β, γ');
- Opostos pelo vértice (o.p.v.)*: (α, γ); (β, δ); (α', γ'); (β', δ').

* ângulos congruentes (de mesma medida)

** ângulos suplementares

## 1.3 TRIÂNGULOS

**Definição:** Figura geométrica plana formada por três pontos, chamados vértices e a união das semi-retas que unem esse três pontos. Em resumo, é uma figura de três lados e que possui três ângulos.

### 1.3.1 Classificação dos triângulos quanto aos lados

- **Eqüilátero:** possui os três lados (e consequentemente os três ângulos) iguais (congruentes);
- **Isósceles:** possui dois lados iguais. O terceiro lado é chamado *base*. Os ângulos formados pela base com os lados são iguais.
- **Escaleno:** <u>não</u> possui nenhum lado (consequentemente nenhum ângulo) igual.

### 1.3.2 Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

- **Acutângulo:** Possui três ângulos internos *agudos;*
- **Obtusângulo:** Possui um ângulo interno *obtuso*;
- **Retângulo:** Formado por um ângulo interno reto. O lado oposto ao ângulo reto é chamado *hipotenusa* e os outros dois lados são chamados *catetos.*

### 1.3.3 Propriedades

- **A soma dos ângulos internos de <u>todo e qualquer</u> triângulo é 180º;**
- A soma dos ângulos externos de <u>qualquer</u> triângulo é 360º;
- Todo ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos seus dois ângulos internos não adjacentes;
- O maior lado do triângulo se opõe (“vê”, “está de frente”) ao maior ângulo e o menor lado se opõe ao menor ângulo;
- **Desigualdade triangular:** a, b, c formam um triângulo se, e somente se, $|a - b| < c < a + b$.

### 1.3.4 Semelhança de triângulos

Um dos conceitos mais importantes da Geometria Plana.

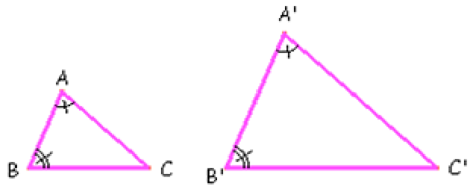
**Definição:** Dados dois triângulos ($\Delta ABC$ e $\Delta DEF$), dizemos que estes são *semelhantes* se, e somente se, estes são formados pelos mesmos ângulos internos. Observado isso, podemos afirmar ainda que:

$$\boxed{\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k}$$

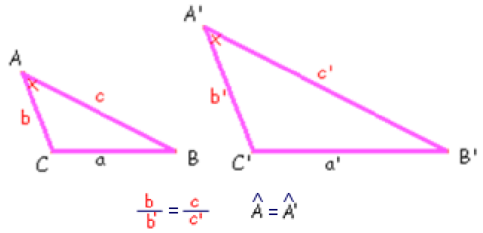
onde k é chamado razão de semelhança.

### 1.3.4.1 Alguns casos de semelhança

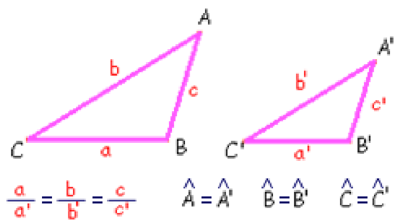
- **Ângulo – ângulo (AA):** Se dois ângulos são iguais, o terceiro também será. Logo, os triângulos são semelhantes.




- **Lado – ângulo – lado (LAL):** Dados dois triângulos, sendo dois lados de um triângulo proporcionais a dois lados do outro triângulo e o ângulo entre estes lados semelhante nas duas formas geométricas, concluímos que os triângulos são semelhantes.

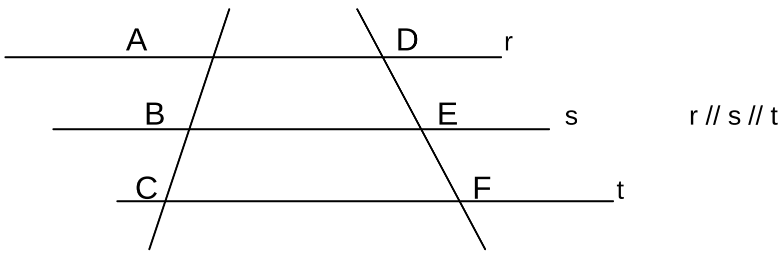



- **Lado – lado – lado (LLL):** Dados dois triângulos cujos três lados de um são proporcionais aos três lados do outro, conclui-se que estes triângulos são semelhantes.




### 1.3.5 Teorema de Tales (Caso Geral da Semelhança de Triângulos)

Dadas retas paralelas interceptadas por duas transversais, podemos afirmar, segundo Tales, que existe uma proporcionalidade entre os trechos interceptados.




***Teorema de Tales***

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

### 1.3.6 Elementos construtivos de um triângulo

Estes elementos são segmentos de reta que podem ser traçados sobre o triângulo e possuem propriedades específicas, sempre relacionando vértices, lados e ângulos.

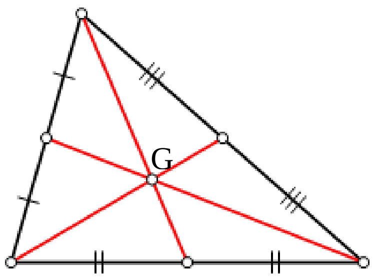
Vale lembrar que todo triângulo possui três de cada um destes elementos, sempre relativo a cada vértice, a cada lado ou ainda a cada ângulo. Além disso, estes elementos relativos concorrem (“se encontram”) sempre em um único ponto com propriedades específicas para cada elemento, conforme veremos a seguir.

Os elementos são os seguintes:

- **Mediana**

Segmento que une o vértice ao ponto médio do lado oposto.

ATENÇÃO: Não importa o ângulo formado entre este segmento e o lado, só importa que ele divide o lado em duas partes iguais.



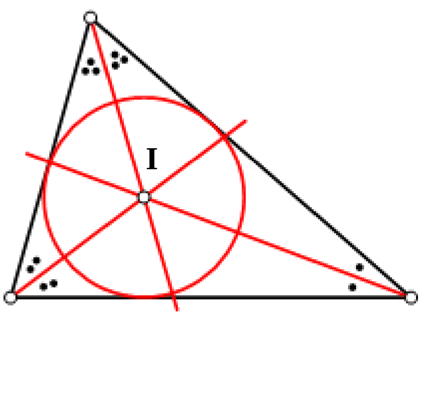

Observe que as medianas concorrem no ponto G, chamado de ***baricentro.***

Teorema: O baricentro divide a mediana numa razão 2:1, i.e., a distância do ponto G ao vértice é o dobro da distância de G ao ponto médio do lado oposto.

- **Bissetriz**

Segmento que parte do vértice e divide o respectivo ângulo interno em duas partes iguais.

ATENÇÃO: Não importa onde este segmento intercepta o lado oposto, nem ângulo e nem ponto, só importa que ele divide o ângulo interno em dois ângulos iguais.



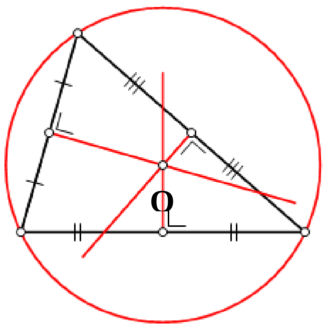

Observe que as bissetrizes concorrem no ponto I, chamado de ***incentro.***

Observe ainda que o incentro é o *centro da circunferência inscrita* (“escrita dentro”) ao triângulo.

- **Mediatriz**

Segmento perpendicular ("que forma um ângulo reto") ao lado do triângulo, e passa ainda pelo seu ponto médio.

ATENÇÃO: Não importa se o segmento passa ou não pelo vértice do triângulo. Só importa que é perpendicular ao lado e divide o mesmo em duas partes iguais. *Não confundir com mediana!*



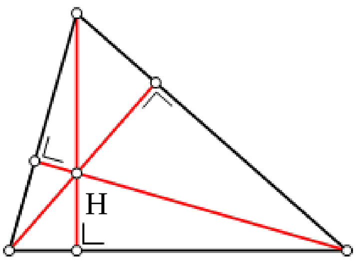

Observe que as mediatrizes concorrem no ponto O, chamado de ***circuncentro.***

Observe ainda que o circuncentro é o *centro da circunferência circunscrita* ao triângulo.

- **Altura**

Segmento que une o vértice ao lado oposto e é perpendicular à este lado.

ATENÇÃO: Não importa o ponto em que passa este segmento. Só importa que ele sai do vértice e forma 90º com o lado oposto.



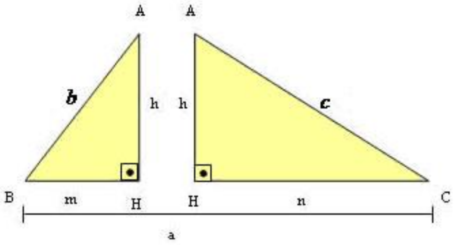

Observe que as alturas concorrem no ponto H, chamado de ***ortocentro.***

**Sugestão:** Desenhe um *triângulo eqüilátero* e encontre neste os pontos G, I, O e H. O que você observa? Quais outras características do triângulo eqüilátero (como são seus lados, quanto valem seus ângulos)?

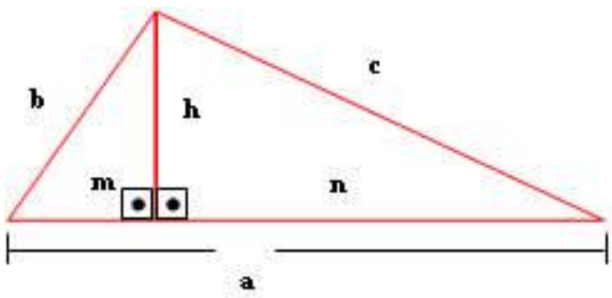
Faça o mesmo com um *triângulo isósceles*.

### 1.3.7 Relações métricas no triângulo retângulo

Observe os triângulos:




Os triângulos AHB e AHC são semelhantes, então podemos estabelecer algumas relações métricas importantes (SUGESTÃO: Tente fazer as demonstrações. Chega-se facilmente às relações apresentadas utilizando-se a semelhança de triângulos indicada)




$b.c = a.h$

$c^2 = a.n$

$b^2 = a.m$

$h^2 = m.n$

**Teorema de Pitágoras**

*"A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa"*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

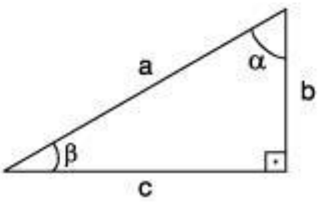
### 1.3.8 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Estabelecem uma relação entre os ângulos (seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tg)) e os lados de um triângulo retângulo.

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{CO}{HIP} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{CA}{HIP} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{b}{c}$$




CO: cateto oposto*

CA: cateto adjacente*

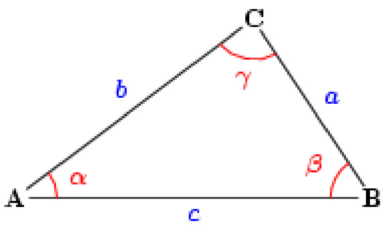
HIP: hipotenusa

*sempre em relação ao ângulo em estudo. (Ex.: oposto à α adjacente à α.)

### 1.3.9 Lei dos senos

Estabelece uma relação entre os lados de qualquer triângulo e seus ângulos opostos, através do valor dos senos.

É utilizada para encontrar as medidas dos lados, dados dois ângulos e outro lado, ou ainda um dos ângulos, dados dois lados e outro ângulo.

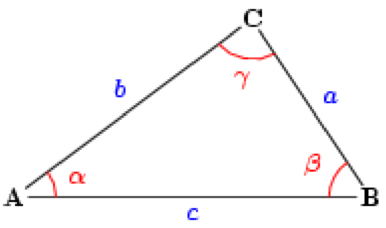



$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

### 1.3.10 Lei dos co-senos

Estabelece uma relação entre os lados de qualquer triângulo e seus ângulos, através do valor dos co-senos.

É utilizada para encontrar as medidas de um lado, dados os outros dois lados e o ângulo entres estes, ou ainda encontrar um ângulo, dados os lados do triângulo.




$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma$

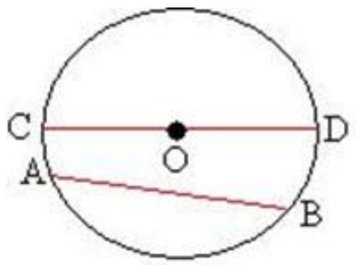
### 1.3.11 Valores de seno, co-seno e tangente dos ângulos notáveis

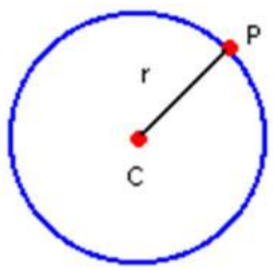
| | **30º** ($\pi$ / 6) | **45º** ($\pi$ / 4) | **60º** ($\pi$ / 3) | **0º** | **90º** ($\pi$ / 2) |
|---|---|---|---|---|---|
| **sen** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0 | 1 |
| **cos** | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |
| **tg** | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | 0 | $\infty$ |

## 1.4 CIRCUNFERÊNCIA

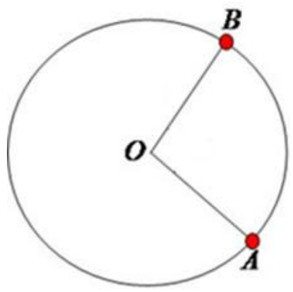
**Definição:** O conjunto de todos os pontos que estão a **exatamente** uma determinada distância de um ponto dado do mesmo plano chama-se *circunferência.*

### 1.4.1 Elementos




- **Corda:** Qualquer segmento interno a circunferência com extremidades em dois pontos pertencentes à mesma. Na figura ao lado, AB e CD são cordas da circunferência.
- **Diâmetro:** Qualquer corda da circunferência que contenha o centro da mesma. É a maior corda da circunferência. CD representa um diâmetro da circunferência na figura.
- 

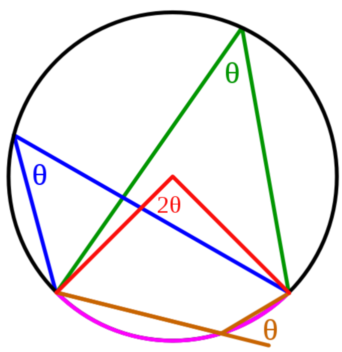

- **Raio:** Qualquer segmento que liga o centro a um ponto qualquer da circunferência. PC é raio da circunferência ao lado. Note que o raio é metade do diâmetro! **(D = 2.R)**




- **Arco:** É uma parte da circunferência, definida por um ângulo central $m_a(AB)$ e um comprimento m(AB) (determinado por dois pontos da circunferência).

### 1.4.2 Teorema do ângulo central

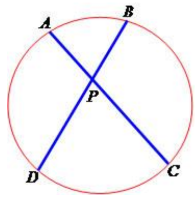
**Definição:** Chamamos de ângulo central, todo e qualquer ângulo cujo vértice seja o centro da circunferência.




**Teorema:** *"A medida de um ângulo inscrito num arco é igual a metade da medida angular do arco interceptado da mesma circunferência".*

Em outras palavras, um ângulo cujo vértice pertence a circunferência equivale a metade do ângulo central que "enxerga" o mesmo arco que este.

### 1.4.3 Relações métricas na circunferência



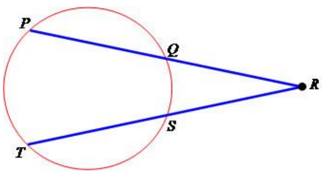

#### 1.4.3.1 Teorema das cordas:

*"Dada a interseção de duas cordas da circunferência, o produto das partes de uma corda é igual o produto das partes da outra corda"*

$$\boxed{AP.PC = BP.PD}$$

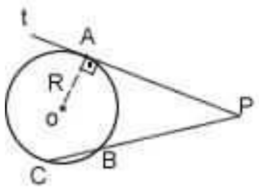
#### 1.4.3.2 Teorema das secantes:

*"Dados dois segmentos secantes ("que cortam") a circunferência partindo de um mesmo ponto, o produto das partes internas a circunferência pelas externas a circunferência é igual em ambos segmentos."*




$$\boxed{PQ.QR = TS.SR}$$

#### 1.4.3.3 Teorema da secante-tangente:




*"Dado um segmento secante a circunferência e outro tangente a mesma, o quadrado da medida do segmento tangente é igual ao produto da parte interna do segmento que é secante pela sua parte externa"*

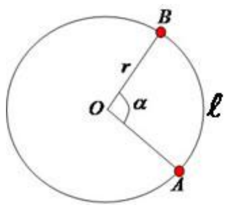
$$\boxed{(PA)^2 = PB.BC}$$

**PROPRIEDADE IMPORTANTE:** Todo e qualquer segmento tangente ("que toca em um, e apenas um ponto") à circunferência é um segmento perpendicular ao raio da mesma.

### 1.4.4 Comprimentos

#### 1.4.4.1 Circunferência (C)

Dada uma circunferência de raio r, o perímetro (comprimento) da mesma é:




$$\boxed{C = 2.\ \pi\ .r}$$

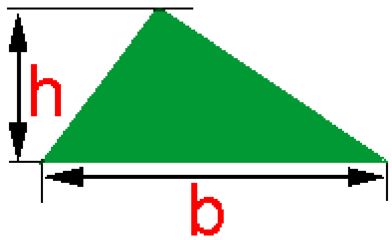
#### 1.4.4.2 Arco de circunferência (L)

Dado um arco de circunferência (AB) representado pelo ângulo $\alpha$, fazendo uma regra de três temos: $\boxed{L = \pi .r. \alpha / 180^o}$

| Ângulo | perímetro |
|---|---|
| 360º | 2. $\pi$ .r |
| $\alpha$ | L |

## 1.5 ÁREAS DAS FIGURAS PLANAS

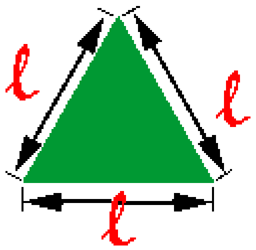
### 1.5.1 Triângulos




$$A = b.h / 2$$

#### 1.5.1.1 Casos particulares

##### 1.5.1.1.1 Triângulo Eqüilátero

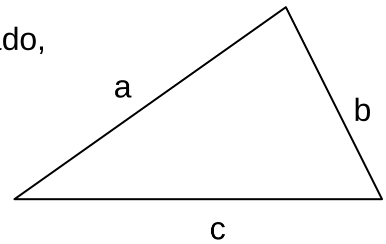



$$A = \frac{L^2.\sqrt{3}}{4}$$

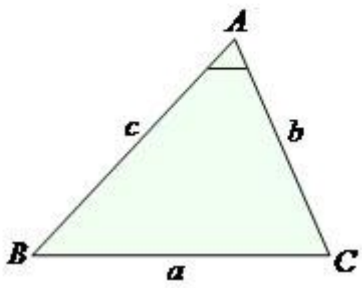
##### 1.5.1.1.2 Fórmula de Heron

Seja p = $\frac{a+b+c}{2}$ o semiperímetro do triângulo ao lado,

Então: $A = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$



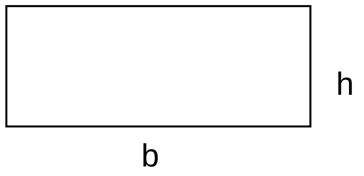

##### 1.5.1.1.3 Dados dois lados e o ângulo entre eles




$$A = b.c.\text{sen}\,\hat{A} / 2$$

### 1.5.2 Quadriláteros

#### 1.5.2.1 Retângulo

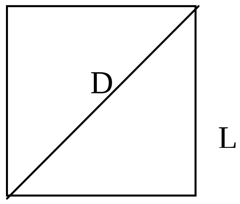



$$A = b \cdot h$$

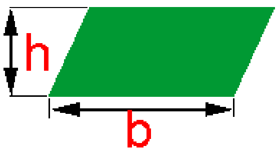
No caso especial em que b = h temos um quadrado (todos os lados iguais). Chamando o lado do quadrado de L, temos:

$$A = L^2$$

$$\mathbf{D = L.}\sqrt{2}$$




#### 1.5.2.2 Paralelogramo



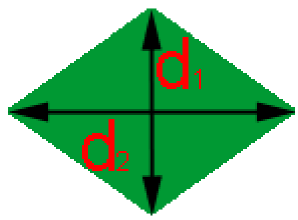

Os lados são paralelos e de igual tamanho dois a dois. Os ângulos entre os lados dependem das medidas dos lados.

$$A = b.h$$

Apesar de ser a mesma fórmula do retângulo, deve-se atentar que **h** neste caso não é a medida do lado da figura, mas sim perpendicular à base.

#### 1.5.2.3 Losango

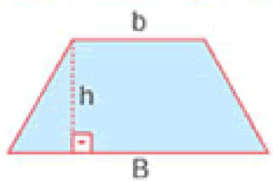
É um caso especial de paralelogramo, onde além da disposição paralela os lados são iguais. E, ainda, as diagonais são perpendiculares, porém os lados não paralelos não são perpendiculares entre si.




$$A = \frac{d1.d2}{2}$$

#### 1.5.2.4 Trapézio

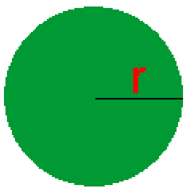
$$S = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$



### 1.5.3 Círculo e seus subconjuntos

**Definição:** O conjunto de todos os pontos que estão **<u>até</u>** uma determinada distância de um ponto dado do mesmo plano chama-se *círculo.*

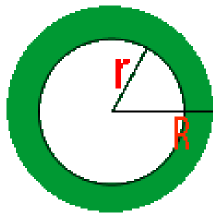
#### 1.5.3.1 Círculo




$$\boxed{A = \pi \,.\, r^2}$$

#### 1.5.3.2 Coroa circular

Utilizando o princípio da superposição de áreas, basta fazer a área do círculo maior menos a do círculo menor.




$$\boxed{A = \pi\,(R^2 - r^2)}$$

#### 1.5.3.3 Setor circular

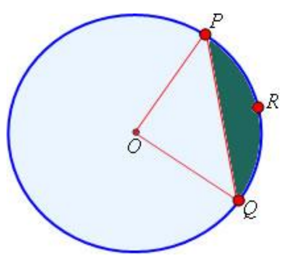

É a área de um pedaço do círculo, representado pelo ângulo $\theta$. Similar ao cálculo do comprimento de arco de circunferência, fazemos uma regra de três:

| Ângulo | área |
|---|---|
| 360º | $\pi\,.r^2$ |
| $\theta$ | A |

$$\boxed{A = \frac{\pi . r^2 . \theta}{360^\circ}}$$

#### 1.5.3.4 Segmento circular

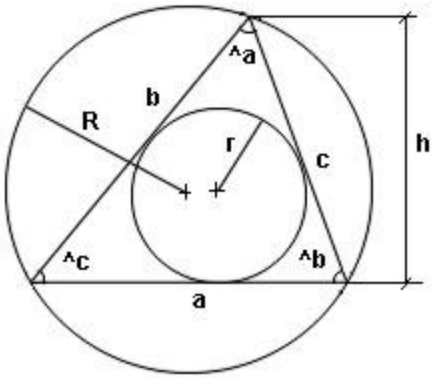
O segmento circular é a área delimitada por uma corda e por um arco de circunferência. Na figura, está representada pela área hachurada em verde.




Observa-se que este segmento é obtido pela subtração do triângulo isósceles POQ do setor circular de centro O e arco PQ.

$$A_{segmento} = A_{setor} - A_{triângulo} \longrightarrow \boxed{A_{segmento} = \frac{\pi . r^2 . \theta}{360^\circ} - \frac{r^2 . sen\theta}{2}}$$

### 1.5.4 Relação entre área e lados do triângulo e raio da circunferência inscrita e circunscrita ao mesmo.




- **Circunferência inscrita**

É a circunferência “dentro” do triângulo.

$$A = p.r, \text{ onde } p = \frac{a+b+c}{2}$$

**Sugestão:** Demonstre a fórmula acima.

- **Circunferência circunscrita**

É a circunferência que “envolve” o triângulo.

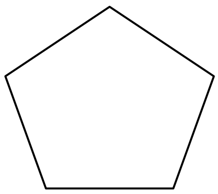
$$A = \frac{a.b.c}{4.R}$$

### 1.5.5 Outros polígonos

Importante: A soma dos ângulos internos de um polígono qualquer depende do número de lados que este possui. A soma dos ângulos internos de um *n* – ágono é dada por:

$$S = (n - 2).\ 180^{\circ}$$

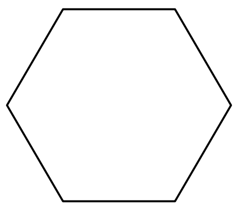
#### 1.5.5.1 Pentágono regular



É um polígono de 5 lados. Por ser *regular* tem todos os lados iguais e os ângulos internos também. Sua área pode ser calculada pela composição da de um triângulo isósceles e da de um trapézio igualmente isósceles. Sugestão: Faça a demonstração da área do pentágono regular de lado L.

#### 1.5.5.2 Hexágono regular

Um polígono de 6 lados. Como é regular, também possui todos os lados e ângulos internos iguais. Facilmente observa que o mesmo é composto por 6 triângulos eqüiláteros. Logo, a área do hexágono de lado L é dada por:



$$A = 6.\ \frac{L^2.\sqrt{3}}{4}$$

## 2 GEOMETRIA ESPACIAL

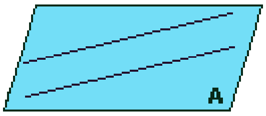
Até este momento trabalhamos com apenas 2 dimensões, analisando as figuras planas. Neste tópico, passamos a considerar o mundo real, as 3 dimensões, e a analisar então planos distintos, fazendo o estudo volumétrico das figuras, por exemplo. Além da análise das medidas de comprimento e área, agora nos interessa também estudar as chamadas *área lateral* das figuras, a *área total, área da base* e *volume.*

### 2.1 Posição entre duas retas

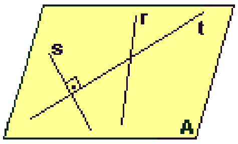
Dadas duas retas (r e s) estas podem ser *coplanares* (estar no mesmo plano) ou *não-coplanares.*

As retas coplanares podem ainda ser *concorrentes* (se encontram em pelo menos um ponto, que não seja o infinito); *coincidentes* (r = s); *paralelas distintas* ("se encontram no infinito").

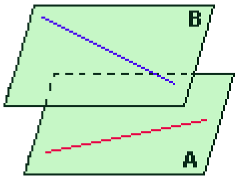
As retas não-coplanares são chamadas de *reversas* (não estão no mesmo plano, nem concorrem em nenhum ponto)



*Retas paralelas*



*Retas concorrentes*



*Retas reversas*

### 2.2 Outras definições:

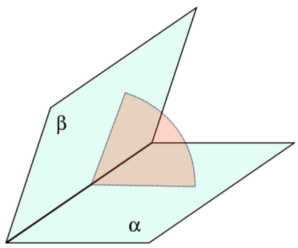
*"Duas retas reversas são ditas* <u>ortogonais</u> *se o ângulo formado entre elas for um ângulo reto."*

*"Uma reta é perpendicular a um plano se, e somente se, a reta for ortogonal a todas as retas do referido plano."*

*"Um plano é perpendicular a outro plano se, e somente se, existir uma reta contida em deles que seja ortogonal ao outro plano."*

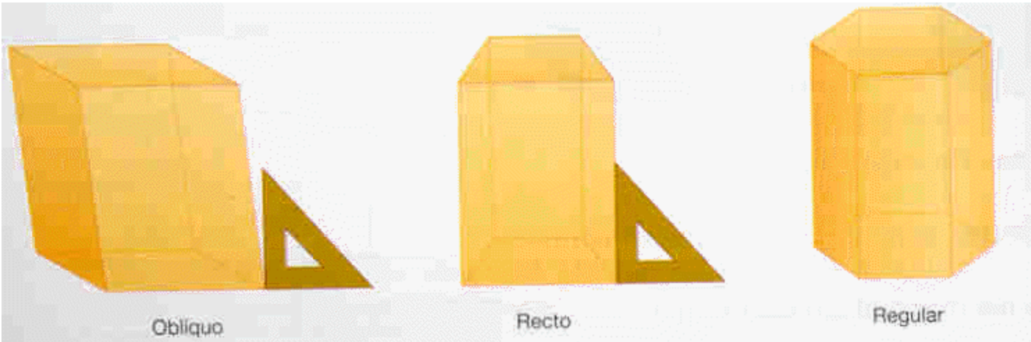
*"*<u>Projeção ortogonal</u> *de um ponto sobre um plano é o pé da perpendicular do ponto pelo plano. A projeção ortogonal de uma figura é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos da figura sobre o plano."*

*"*<u>Diedro,</u> *ou* <u>ângulo diédrico</u>*, é o ângulo formado por dois semiplanos de origem comum. Pode ser medido através do ângulo plano obtido cortando o diedro com um plano perpendicular aos semiplanos."*

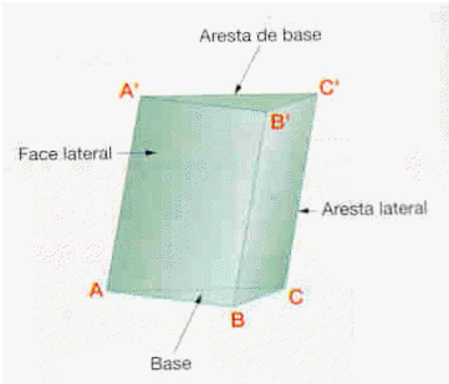


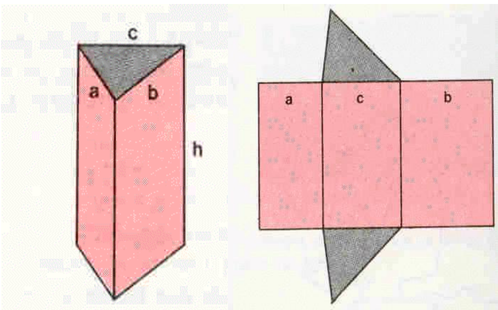
## 2.3 Prismas

Prismas são sólidos geométricos formados por uma face superior e por uma face inferior (chamadas de “base”) paralelas e congruentes ligadas por arestas. A nomenclatura do prisma depende do formato de suas bases. Quanto às suas arestas laterais, o prisma pode ser classificado como *reto* quando estas são perpendiculares a base ou *oblíquo.* Um prisma é chamado *regular* quando este é reto e suas bases são polígonos regulares (de lados iguais).




Os planos contidos entre duas arestas laterais são chamados de *faces laterais*. A distância entre os planos que contém as bases do prisma é chamada de *altura do prisma* (note que esta distância é uma perpendicular entre esses planos, como no caso do paralelogramo).




Chamamos *área lateral* ($A_L$) a superfície formada pelas faces laterais do prisma. Na figura, a área lateral do prisma triangular é a superfície pintada de vermelho.

Em cinza, esta a superfície que chamamos de *área da base* ($A_B$).

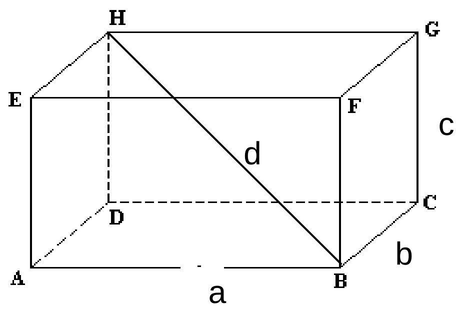
Assim, temos as fórmulas generalizadas para os sólidos prismáticos:

$$\boxed{A_T = A_L + 2.\ A_B}$$ Área total

$$\boxed{V = A_B\ .\ h}$$ Volume

### 2.3.1 Paralelepípedo reto-retângulo

Conforme vimos no item 2.3, o *paralelepípedo reto-retângulo é* um prisma reto com bases retangulares.




a,b,c: lados do paralelepípedo

BH: uma diagonal do paralelepípedo

BE: uma diagonal de face

Temos:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\boxed{A_T = 2(ab + ac + bc)}$$

$$\boxed{V = a.b.c}$$

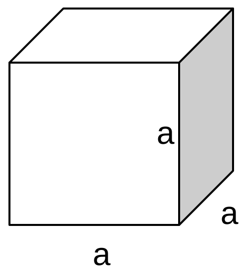
#### 2.3.1.1 Cubo

Um *cubo* é um paralelepípedo reto-retângulo cujas três dimensões são iguais (a = b = c).

$d_{face} = a. \sqrt{2}$

$d_{cubo} = a. \sqrt{3}$

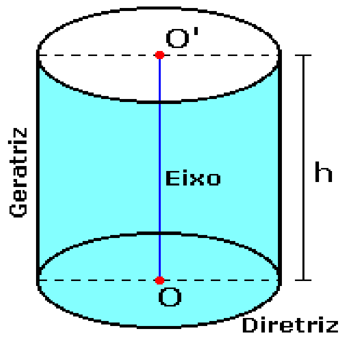
$$\boxed{\begin{array}{c} A_T = 6.a^2 \\ V = a^3 \end{array}}$$

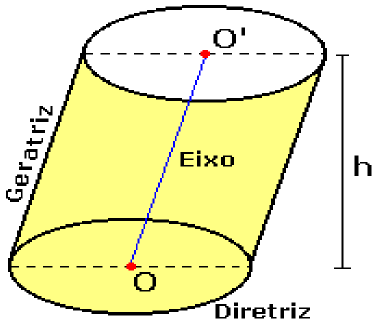



<u>Sugestão:</u> Verifique cada um destes resultados apresentados encontrando as diagonais e calculando também as áreas de base e áreas laterais.

## 2.4 Cilindros

Uma das figuras da geometria mais utilizadas no dia-a-dia. Muitos dos objetos que utilizamos têm exatamente o formato cilíndrico. Por isso, o estudo dos cilindros nos dá uma noção importante de espaço e de volume, por exemplo, de um copo d'água, uma panela, uma lata de tinta e outras coisas.




Dados dois círculos contidos em planos paralelos distintos, à união destes círculos no espaço tridimensional chamamos *cilindro*.

Os círculos são as bases do cilindro e a cada segmento que une um ponto do círculo com sua projeção no outro círculo chamamos *geratriz.* A reta que passa pelo centro das bases chama-se *eixo.* E a distância entre os planos das bases é a *altura.*

Se o eixo do cilindro é perpendicular as bases, então o cilindro é chamado de *cilindro reto* ou *cilindro de revolução* (porque a superfície lateral é obtida pela rotação de um segmento (a geratriz) em torno de uma reta (eixo)). Verifique que a lateral do cilindro reto quando planificada forma um retângulo!

Se o eixo não for perpendicular a base, o cilindro é *oblíquo.*

Sendo r o raio dos círculos da base de um cilindro, temos:

$$\boxed{V = \pi \, . \, r^2 . h}$$

Se o cilindro for reto, temos ainda:

$$A_L = 2. \, \pi \, .r.h$$

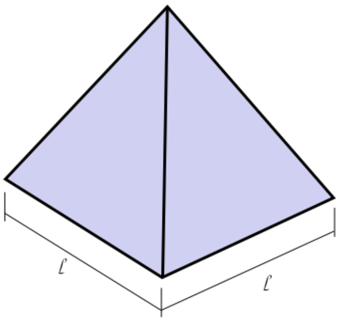
$$A_B = \pi \, .r^2$$

$$A_T = 2. \, \pi \, .r.(r + h)$$

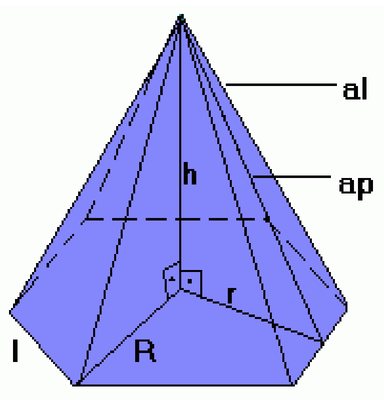
### 2.5 Pirâmides

Considere uma região poligonal convexa (P) e um ponto fora do plano que contém essa região (V) e seja X um ponto qualquer de P. Ao conjunto de todos os segmentos VX dá-se o nome de *pirâmide*, sendo P sua *base* e V seu *vértice*.

Em outras palavras, pirâmide é todo poliedro formado por uma face inferior e um vértice comum a todas as faces laterais. As faces laterais de uma pirâmide são triangulares e o número de faces depende do número de lados do polígono da base. As pirâmides são ainda classificadas de acordo com o polígono da base. A distância do vértice ao plano que contém a base é chamada de *altura da pirâmide.*




Uma pirâmide é chamada *reta* quando possui todas as arestas laterais congruentes, ou ainda, quando a reta que une o vértice da pirâmide ao centro do polígono da base da mesma é perpendicular ao plano que contém a referida base. Se além de *reta,* sua base for um polígono regular dizemos então que a pirâmide é *regular.*




Na <u>pirâmide regular</u> todas as faces laterais são triângulos isósceles congruentes e as alturas relativas às bases das faces laterais são congruentes e recebem o nome de *apótemas.* Neste caso, temos:

r: apótema da base

ap: apótema da pirâmide

$$r^2 + h^2 = (ap)^2$$

Para as pirâmides, temos:

$$\boxed{\begin{array}{l} A_T = A_L + A_B \\[2ex] V = \frac{1}{3}.A_B \, . \, h \end{array}}$$

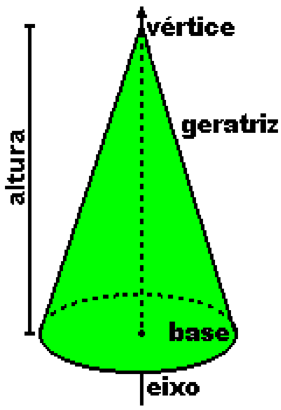
Note que a área total e o volume dependem do polígono da base da pirâmide e a área lateral será a soma das áreas dos triângulos que formam as faces da pirâmide.

Note ainda que a área total, diferente dos prismas, tem apenas uma área da base, o que é óbvio, dado que a pirâmide não possui face superior. Além disso, seu volume representa 1/3 do volume de um prisma. Verifique esta afirmação!

### 2.6 Cones

Considere um círculo (C), de centro O e raio r e um ponto V fora do plano que contém esse círculo e seja X um ponto qualquer de P. Ao conjunto de todos os segmentos VX dá-se o nome de *cone circular*, sendo C sua *base* e V seu *vértice*.

Note que a definição de cone é praticamente a mesma definição de pirâmide. De fato, são figuras muito semelhantes, se pensarmos que o cone é uma pirâmide cuja base é um polígono de infinitos lados.




O segmento que une o vértice V ao centro O da base é chamado *eixo.* A distância entre o vértice e o plano da base é a *altura do cone*. Todo segmento que une o vértice V a um ponto qualquer da circunferência da base é chamado de *geratriz (g).* Se o eixo não for perpendicular a base o cone é *oblíquo*.

Se o eixo do cone for perpendicular a base, dizemos que o cone é *reto* ou, *de revolução*. Neste caso, todas as geratrizes são congruentes e temos:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Para os cones, temos:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} . \pi . r^2 . h}$$

Se o cone é reto, temos ainda:

$$\boxed{A_L = \pi . g^2 . \frac{2.\pi.r}{2.\pi.g} = \pi . r . g}$$

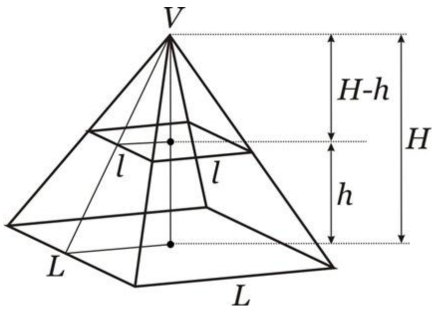
### 2.7 Semelhança de sólidos

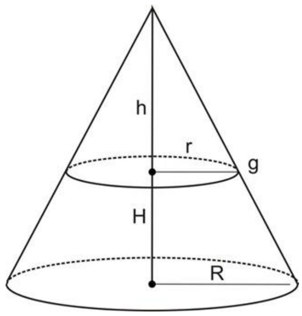
Dizemos que dois sólidos são semelhantes quando seus lados são proporcionais e seus ângulos poliédricos são congruentes. É a extensão no espaço tridimensional do conceito de semelhança na geometria plana. Se k é a razão de semelhança, temos que $k^2$ é a razão entre as áreas correspondentes (das faces, das bases, laterais, totais) e $k^3$ é a razão entre os volumes dos dois sólidos.

## 2.8 Sólidos truncados

Uma seção paralela a base da pirâmide ou do cone divide o sólido em duas partes, sendo uma delas semelhante ao sólido original, e podemos então utilizar dos conceitos do item 2.7.

Quanto a parte que sobra, a que não é semelhante ao sólido original, chamamos *tronco.* Para facilitar, quando falarmos em *tronco de pirâmide* e *tronco de cone* vamos admitir que as bases do tronco são paralelas (apesar de existirem troncos com bases não paralelas).

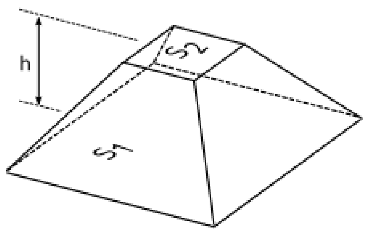



### 2.8.1 Tronco de pirâmides

Você pode observar que as faces laterais do tronco de pirâmides são trapézios.

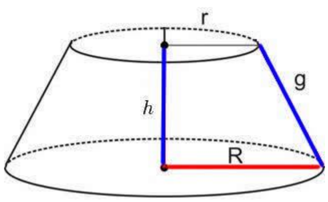
Seja S1 a base maior e S2 a base menor, conforme figura ao lado e h a altura do tronco, é possível demonstrar por semelhança de pirâmides (sugestão: demonstre!) que:




$$V = \frac{h}{3}\left(S1 + \sqrt{S1.S2} + S2\right)$$

### 2.8.2 Tronco de cones

É importante notar que a superfície lateral é um segmento de coroa circular e a diferença entre os raios que definem a coroa é denominada geratriz do tronco.




Você pode demonstrar como no caso da pirâmide que:

$$V = \frac{\pi.h}{3}\left(R^2 + R.r + r^2\right)$$

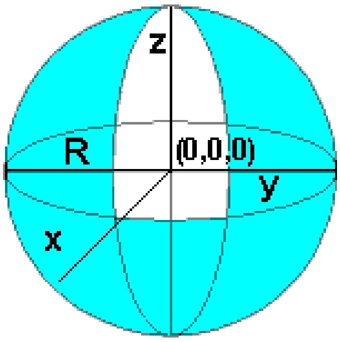
$$A_L = \pi.g.(R + r)$$

## 2.9 Esfera e Superfície esférica

**Definições:**

**Esfera:** Considere um ponto C no espaço. Dada uma distância R chamamos de *esfera* todos os pontos do espaço que estão a uma distância R ou menor que R de C. É uma extensão do conceito de círculo. A esfera é na verdade um círculo girado em torno de um de seus diâmetros.

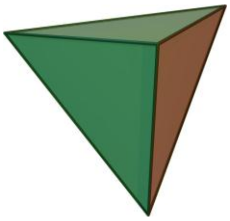
**Superfície esférica:** Considere um ponto C no espaço. Dado uma distância R chamamos de *superfície esférica* todos os pontos do espaço cuja distância a C é exatamente R. É uma extensão do conceito de circunferência. A superfície esférica, similarmente a esfera, é a circunferência girada em torno de um dos diâmetros.

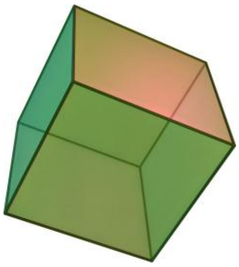


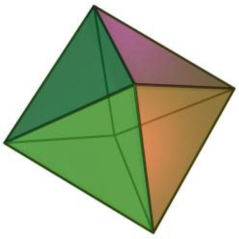

$$V = \frac{4}{3} . \pi . R^3$$

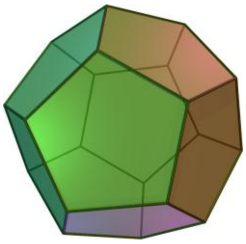
$$A_{superfície} = 4. \pi . R^2$$

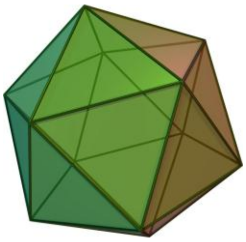
## 2.10 Poliedros regulares


Tetraedro regular


Hexaedro regular

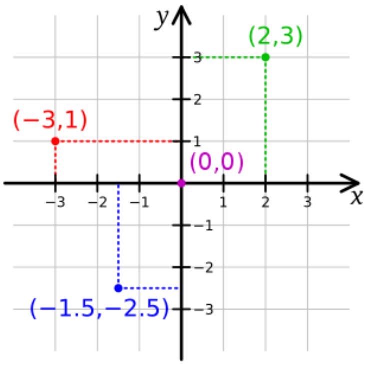

Octaedro regular


Dodecaedro regular


Icosaedro regular

## 3 GEOMETRIA ANALÍTICA

A geometria analítica é o estudo da geometria através dos princípios da álgebra. É usado o sistema de coordenadas cartesianas para manipular equações para planos, retas, curvas e círculos no plano, no nosso caso.



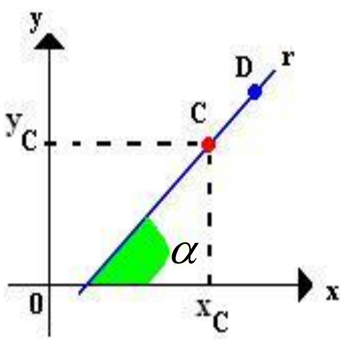

Os estudos iniciais da Geometria Analítica se deram no século XVII, e devem-se ao filósofo e matemático francês René Descartes (1596 - 1650), inventor das coordenadas cartesianas (assim chamadas em sua homenagem), que permitiram a representação numérica de propriedades geométricas.

O eixo x é chamado *eixo das abscissas* e o eixo y *eixo das ordenadas.*

### 3.1 Equação geral da reta

Toda reta pode ser representada pela equação $Ax + By + C = 0$, com A e B não nulos.

### 3.2 Equação reduzida da reta




Uma reta não paralela a Oy pode ser escrita como:

$$y = mx + b,$$

onde chamamos m de *coeficiente angular da reta* e b de *coeficiente linear da reta.*

Como indicam os nomes, *m* determina a inclinação $\alpha$ da reta (em relação ao eixo x, sentido anti-horário como positivo) e *b* determina o ponto no qual a reta intercepta o eixo das ordenadas.

Temos ainda, pela figura:

$$m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sendo assim, dados dois pontos de uma reta, ou ainda um único ponto $(x_0; y_0)$ e seu coeficiente angular (m), podemos determinar a equação da mesma fazendo:

$$y - y_0 = m.(x - x_0)$$

IMPORTANTE: Se $m > 0$, a reta é *crescente.* Se $m < 0$, a reta é *decrescente.*

### 3.3 Equação da reta por dois pontos

Dados dois pontos A = (x1, y1) e B = (x2, y2), uma segunda maneira de determinar a equação da reta por A e B é resolvendo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

### 3.4 Posições de duas retas no plano

Podemos determinar as posições relativas entre duas retas no plano comparando seus coeficientes (angular e linear).

Dadas as seguintes retas:

$$r: y = m_r .x + b$$

$$s: y = m_s .x + c$$

Temos:

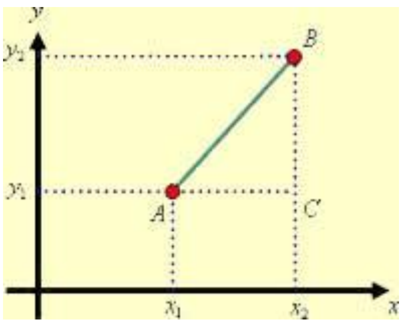
- $r = s \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array} \right.$ , r e s são *retas coincidentes*;
- $r \,//\, s \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = c \\ b \neq d \end{array} \right.$, r e s são *retas paralelas;*
- $r \times s \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a \neq c \\ m_r .m_s \neq -1 \end{array} \right.$, r e s são *retas concorrentes;*
- $r \perp s \Leftrightarrow \left| m_r .m_s = -1 \right.$, r e s são *retas perpendiculares*

### 3.5 Distância entre dois pontos

Já sabemos que a menor distância entre dois pontos é uma reta. Vamos agora determinar esta distância entre dois pontos, dadas as coordenadas dos pontos.

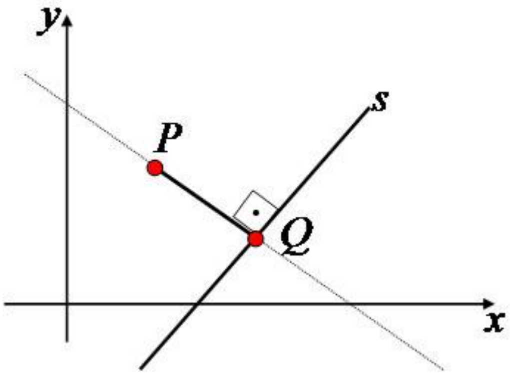
Dados os pontos A = (x1;y1) e B = (x2; y2), a distância entre eles d(A;B) é:

d(A; B) = $\sqrt{(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2}$




<u>Sugestão:</u> Faça a demonstração desta fórmula a partir da figura ao lado. Como dica, utilize os conceitos da geometria plana, como o Teorema de Pitágoras.

### 3.6 Distância de um ponto a reta




A distância de um ponto a uma reta é a medida do segmento com extremidades no referido ponto e na reta, sendo perpendicular a mesma.

Dados o ponto P = (x1; y1) e a reta r de equação Ax + By + C = 0, com A e B não nulos, a distância d(P; r) é:

$$d(P;r) = \frac{|Ax1 + By1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

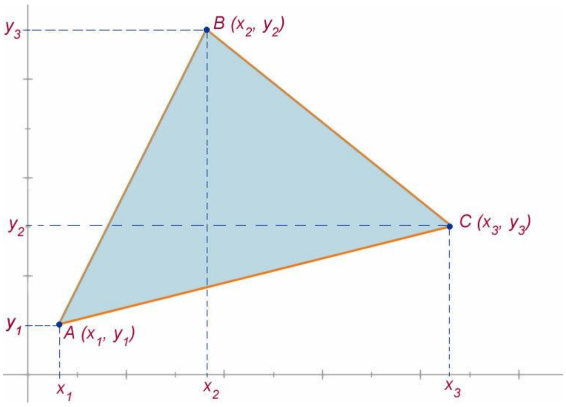
### 3.7 Ponto médio de um segmento

O ponto médio M = ($x_{m;}$ $y_m$) de um segmento de extremidades A = (x1; y1) e B = (x2; y2) é dado por:

$$\left| \begin{array}{l} x_m = \dfrac{x1 + x2}{2} \\ y_m = \dfrac{y1 + y2}{2} \end{array} \right.$$

### 3.8 Baricentro (G) e área (S) de um triângulo

Dados os vértices de um triângulo A = (x1; y1), B = (x2; y2) e C = (x3; y3), temos:



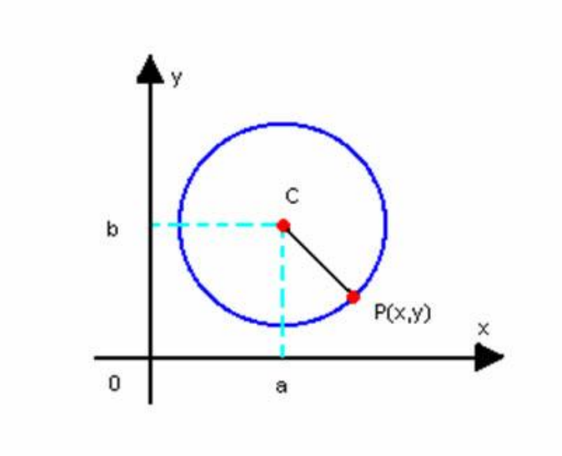

$$G(x,y) = \left( \frac{x1 + x2 + x3}{3}; \frac{y1 + y2 + y3}{3} \right)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

### 3.9 Equação reduzida da circunferência

Dada uma circunferência de centro C = (a;b) e raio r, a equação que determina a mesma é dada por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$




### 3.10 Equação geral da circunferência

Dada a equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, esta representa:

- Uma *circunferência* de centro (a;b) e raio r, se, e somente, se:

$$\begin{cases} A = B \neq 0 \\ C = 0 \\ D^2 + E^2 - 4AF > 0 \end{cases}$$

E, ainda:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{D}{2A} \\ b = -\dfrac{E}{2A} \\ r = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2|A|} \end{cases}$$

- O ponto (a;b) se:

$$\begin{cases} A = B \neq 0 \\ C = 0 \\ D^2 + E^2 - 4AF = 0 \end{cases}$$

- Um conjunto vazio se:

$$\begin{cases} A = B \neq 0 \\ C = 0 \\ D^2 + E^2 - 4AF < 0 \end{cases}$$

### 3.11 Posições relativas entre uma reta e uma circunferência

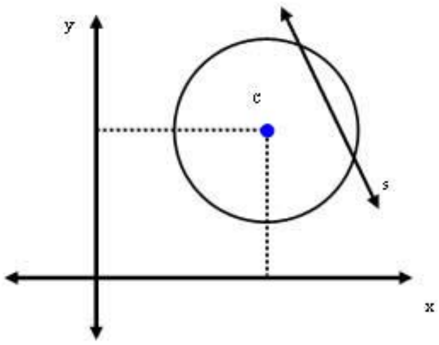
Dada uma reta r por Ax + By + C = 0, com A e B não nulos e uma circunferência de raio R e centro O por $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, sendo $D^2+E^2 - 4AF > 0$. Resolvemos então o seguinte sistema:

$$\left| \begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \end{array} \right.$$

Isolando uma das variáveis na equação da reta e substituindo na equação da circunferência obtemos uma equação do segundo grau. E, então de acordo com o $\Delta$ da equação determinamos a posição da reta.

Determinando a distância d(r,O) da reta ao centro da circunferência e comparando a mesma com o raio R da circunferência, também conseguimos determinar a posição relativa da reta.

Assim temos:

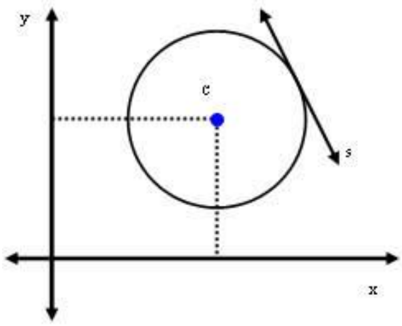


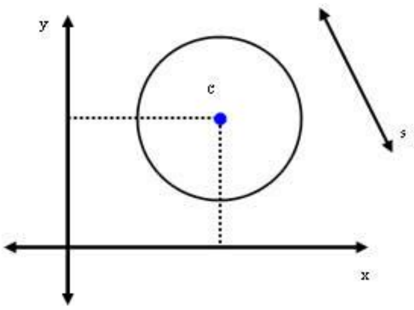

- *Reta secante* à circunferência se, e somente se:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta > 0 \\ ou \\ d(r,O) < R \end{array} \right.$$

- *Reta tangente* à circunferência se, e somente se:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta = 0 \\ ou \\ d(r,O) = R \end{array} \right.$$



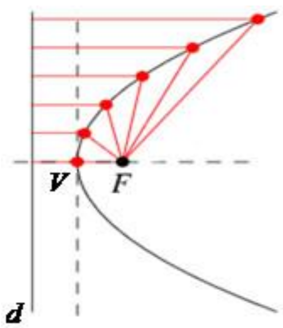




- *Reta exterior* à circunferência se, e somente se:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta < 0 \\ ou \\ d(r,O) > R \end{array} \right.$$

### 3.12 Parábola com diretriz paralela a um dos eixos coordenados

Suponha um eixo d e dois pontos F (foco) e V (vértice). A distância entre a reta d (diretriz) e o ponto V deve ser a igual à distância entre os pontos V e F. Determinamos então uma sequência de pontos os quais deverão estar à mesma distância de F e d.

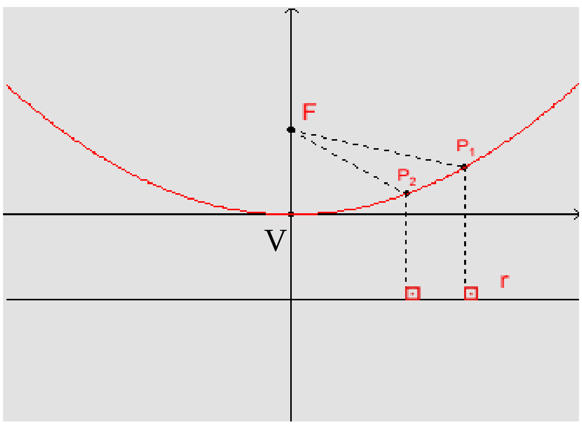



A parábola é formada pela união de todos os pontos do plano que estão à mesma distância do ponto F e da reta d.Todos os pontos do plano que possuem essa característica pertencem à parábola.

Suponha uma parábola cuja diretriz é paralela ao eixo das abscissas.

A função y = ax² + bx + c, sendo *a* não nulo, determina esta parábola. (Note que a parábola é a função que representa uma equação do segundo grau).

Temos assim, os seguintes pontos e equação importantes:




$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$y = -\frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}$$

Eq. da diretriz

Além disso, os coeficientes a, b e c e o valor do $\Delta$ da equação da parábola ainda determinam as características da mesma:

| coeficiente | o que determina | como determina |
|---|---|---|
| **a** | concavidade | se a > 0, para cima $\cup$<br><br>se a < 0, para baixo $\cap$ |
| $\Delta$ | raízes da função<br><br>(pontos em que a parábola corta o eixo x) | se $\Delta$ > 0, duas e distintas<br><br>se $\Delta$ = 0, uma única<br><br>se $\Delta$ < 0, nenhuma |
| **b** | posição do vértice em relação ao eixo vertical | se b/a > 0, está a esquerda de Oy.<br><br>se b/a < 0, está a direita de Oy. |
| **c** | ponto em que a parábola corta o eixo das ordenadas | dá o valor exato do ponto de interseção |

# 4 TRIGONOMETRIA

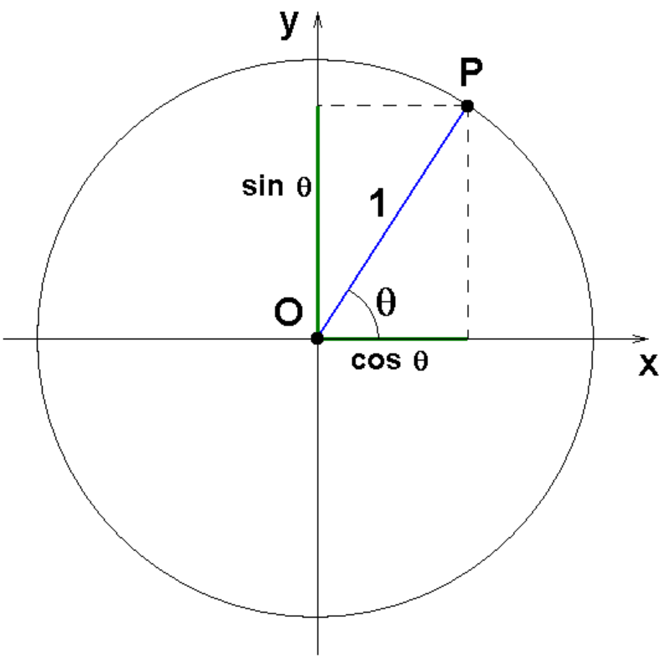
## 4.1 Circunferência e funções trigonométricas

A *circunferência trigonométrica* consiste numa circunferência orientada de raio unitário centrada na origem de um plano cartesiano ortogonal. O sentido positivo de marcação dos arcos na circunferência é o sentido *anti-horário,* sendo o ângulo medido em relação ao eixo dos co-senos, sobre o qual se marca o ângulo inicial, 0º, no sentido positivo.

O *seno* de um ângulo é obtido pela projeção do raio da circunferência em relação ao eixo vertical, tendo este raio formado o referido ângulo em relação ao eixo horizontal. O *co-seno* de um ângulo é obtido pela projeção do raio em relação ao eixo horizontal.

Como a circunferência tem raio unitário e é centrada na origem, seno e co-seno variam entre -1 e 1.

É importante observar também que os sinais de cada função dependem do quadrante onde se encontra o ângulo:




| Quadrante | sen | cos | tg |
|---|---|---|---|
| **1º ( 0<x<$\pi/2$ )** | + | + | + |
| **2º ($\pi/2$< x < $\pi$)** | + | - | - |
| **3º ($\pi$< x <$3\pi/2$)** | - | - | + |
| **4º ($3\pi/2$< x < $2\pi$)** | - | + | - |

A partir destas duas funções (sen e cos) podemos obter as outras, pelas seguintes relações:

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}}$$

*tangente*

$$\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$$

*secante*

$$\boxed{\cos ec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}}$$

*co-secante*

$$\boxed{\cot g\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}}$$

*co-tangente*

### 4.2 Relação Fundamental

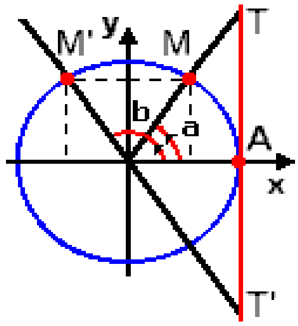
Pela circunferência trigonométrica, podemos observar a relação fundamental entre seno e co-seno. Dado um ponto P qualquer que pertença à circunferência de tal modo que o raio da mesma forme um ângulo x com o eixo horizontal, pelo Teorema de Pitágoras, concluímos que:

$$\boxed{sen^2 x + \cos^2 x = 1}$$

### 4.3 Algumas Relações de Simetria

Faremos as comparações sempre fixando o ângulo a no primeiro quadrante.

**2º quadrante**



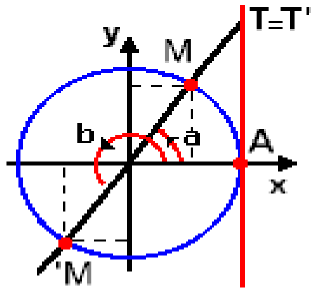

$$sen b = sen(\pi - a) = sen a$$

$$\cos b = \cos(\pi - a) = -\cos a$$

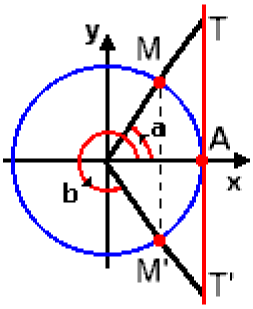
**3º quadrante**

$$sen b = sen(\pi + a) = -sen a$$

$$\cos b = \cos(\pi + a) = -\cos a$$




**4º quadrante**




$$sen b = sen(2\pi - a) = sen(-a) = -sen a$$

Dizemos, portanto, que a função seno é *ímpar*

$$\cos b = \cos(2\pi - a) = \cos(-a) = \cos a$$

Dizemos, portanto, que a função co-seno é *par*

## 4.4 Seno e cosseno da soma e da diferença

| | |
|---|---|
| $sen(x+y) = senx.\cos y + seny.\cos x$ | $\cos(x+y) = \cos x.\cos y - senx.seny$ |
| $sen(x-y) = senx.\cos y - seny.\cos x$ | $\cos(x-y) = \cos x.\cos y + senx.seny$ |

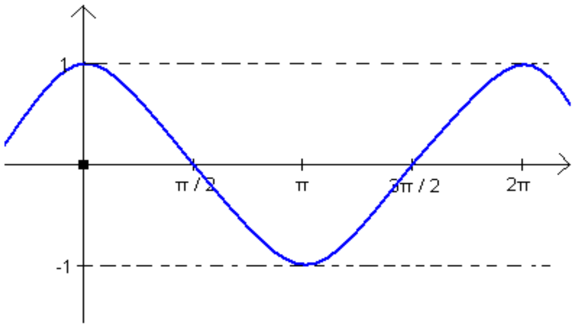
Sugestão: A partir destas fórmulas deduza as fórmulas para $sen(2x)$ , $\cos(2x)$, $sen(x/2)$, $\cos(x/2)$ e $tg(x/2)$

## 4.5 Estudo da variação das funções trigonométricas

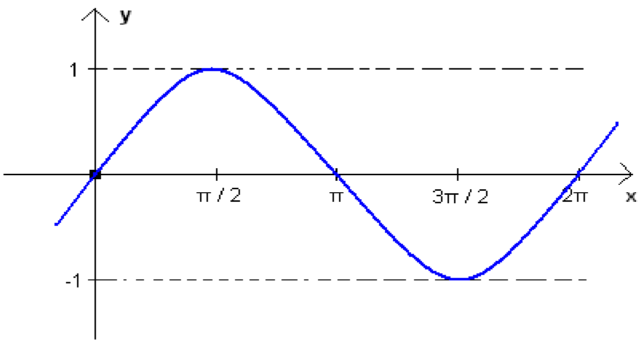
### 4.5.1 Gráfico de f(x)=cos(x)

Observe:

- D(f) = R;
- cos é *par;*
- cos tem *período* de $2\pi$ ;
- Im (f) = [-1;1]




### 4.5.2 Gráfico de f(x) = sen(x)



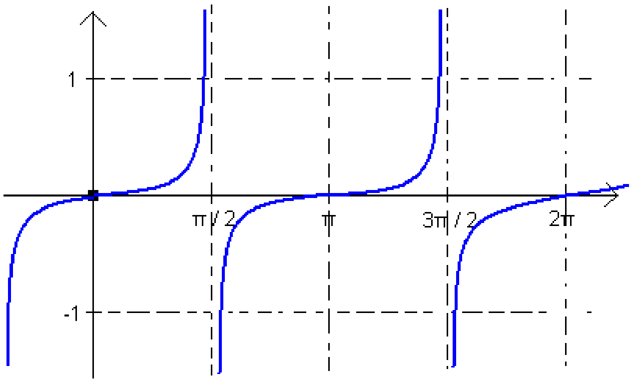

Observe:

- D(f) = R;
- sen é *ímpar;*
- sen tem período de $2\pi$ ;
- Im (f) = [-1;1]

### 4.5.3 Gráfico de f(x) = tg(x)

Observe:

- D(f) = R - $\{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in Z\}$ ;
- tg é *ímpar;*
- tg tem período $\pi$ ;
- Im(f) = R



### 4.5.4 Gráfico de f(x) = k.g(p.(x + h)) + v

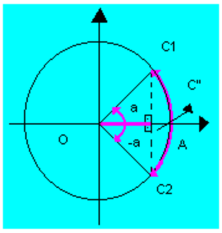
Este estudo é válido quando *k* e *p* são reais não nulos, *h* e *v* são reais e *g* é uma função circular (sen, cos ou tg).

| g | Im f(x) | Período da f |
|---|---|---|
| **sen** | [v - \|k\|; v + \|k\|] | $\frac{2\pi}{\|p\|}$ |
| **cos** | [v - \|k\|; v + \|k\|] | $\frac{2\pi}{\|p\|}$ |
| **tg** | R | $\frac{\pi}{\|p\|}$ |

| Parâmetro | O que muda no gráfico? |
|---|---|
| **k** | se $\|k\|$ < 1, "achata" verticalmente;<br><br>se $\|k\|$ > 1, "alarga" verticalmente |
| **p** | se $\|p\|$ < 1, "achata" horizontalmente;<br><br>se $\|p\|$ < 1, "alarga" horizontalmente; |
| **v** | se move verticalmente $\|v\|$ unidades:<br><br>para cima, se $\|v\|$ > 0;<br><br>para baixo, se $\|v\|$ <0 |
| **h** | se move horizontalmente $\|v\|$ unidades:<br><br>para a esquerda, se $\|v\|$ > 0;<br><br>para a direita, se $\|v\|$ <0 |

## 4.6 Equações trigonométricas

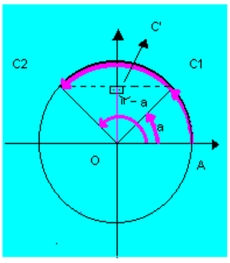
### 4.6.1 Equações do tipo cos f(x) = cos g(x)



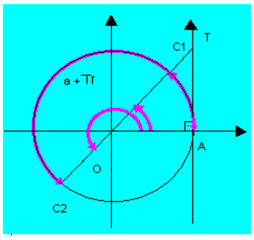

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f(x) = g(x) + 2k\pi, k \in Z \\ ou \\ f(x) = -g(x) + 2k\pi, k \in Z \end{array} \right.$$

### 4.6.2 Equações do tipo sen f(x) = sen g(x)

$$sen f(x) = sen g(x) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f(x) = g(x) + 2k\pi, k \in Z \\ ou \\ f(x) = -g(x) + (2k+1)\pi, k \in Z \end{array} \right.$$




### 4.6.3 Equações do tipo tg f(x) = tg g(x)




$$tg f(x) = tg g(x) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f(x) = g(x) + k\pi, k \in Z \\ f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi, m \in Z \end{array} \right.$$

### 4.6.4 Equações do tipo cotg f(x) = cotg g (x)

$$\cot g f(x) = \cot g g(x) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} f(x) = g(x) + k\pi, k \in Z \\ f(x) \neq m\pi, m \in Z \end{array} \right.$$

### 4.6.5 Equações do tipo cos f(x) = sen g(x)

Demonstra-se que $sen\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ para todo alfa real. Assim temos:

$$\cos f(x) = seng(x) \Leftrightarrow \cos f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right) \Leftrightarrow sen\left(\frac{\pi}{2} - f(x)\right) = seng(x)$$

## 4.7 Inequações trigonométricas

De maneira geral, podemos resolver as inequações seguindo os seguintes passos:

i. Determinamos as soluções da equação obtida da inequação em estudo;
ii. Marcamos na circunferência trigonométrica as soluções encontradas, considerando o intervalo [0, $2\pi$];
iii. Excluímos da circunferência pontos que correspondam a restrições da inequação, se houverem;
iv. Os pontos marcados (soluções ou excluídos) dividem a circunferência em arcos. Se um ponto de um arco satisfaz a inequação, então todos os outros também satisfazem, exceto talvez as extremidades (que devemos conferir). Se um ponto não satisfaz, os demais também não irão conter soluções da inequação, exceto talvez as extremidades.

Dado isso, sugere-se a seguinte estratégia: seleciona-se, no interior de arco determinado, um ponto que represente, de preferência, valores conhecidos. Verifica-se então se os mesmos satisfazem ou não a inequação. A reunião de arcos que satisfazem a inequação forma assim o conjunto verdade da mesma.

## 4.8 Funções trigonométricas inversas

As funções inversas (arcsen, arccos, arctg) podem ser lidas como "arco cujo (seno, co-seno, tangente) é x".

### 4.8.1 arc cos x

$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$ e $0 \le x \le \pi$**,** arc cos:[-1;1] $\longrightarrow$ [0; $\pi$]

### 4.8.2 arc sen x

$y = arcsenx \Leftrightarrow x = seny$ e $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$**,** arc sen: [-1;1] $\longrightarrow$ $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

### 4.8.3 arc tg x

$y = arctgx \Leftrightarrow x = tgy$ e $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$**,** arc tg: R $\longrightarrow$ $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

## 4.9 Algumas identidades

cos arc cos x = x; sen arc sen x = sen x; etc.

cos arc sen x = sen arc cos x = $\sqrt{1-x^2}$